数理解析研究所講究録
99巻 1970年 79-101

普通極値問題の解法から最適制御問題の解法への移行

名古屋大学工学部　　市川 邦彦

§1. まえがき

<u>最適制御問題</u>　制御理論には種々の分野があるが，制御工学を一つの合目的々工学とみたとき，最大かつ窮極の目的は最適制御系の構成にあるといつてよい。最適制御理論はこれを直接的に支えるものであり，他の理論はその発展を支援するものである。

最適制御問題の記述には少くとも次の三つの事項が必要である。

(i) 制御対象の運動を表わす状態ベクトル微分方程式と制御に関する制限

(ii) 終端条件

(iii) 評価関数（最小にすべき汎関数）

その他に積分拘束条件（等周条件）や状態変数に関する制限が加えられることがある。本論では，次の最適問題を論ずる。

制御対象：　$\dot{x} = f(x, u)$　(1)

ここに，$\dot{x} = \frac{d}{d\tau}[x(\tau)]$，$x$ は n 次元状態ベクトル，u は r 次元制御ベクトル，$u(\tau)$ は $[t, t_f]$ において断片的に連続で，u の瞬時値について

$$u(\tau) \in \Omega \quad \forall \tau \in [t, t_f] \tag{2}$$

なる制限があるものとする。

終端条件：　t_f 指定，$x(t_f)$ 自由　(3)

評価関数：　$J = F[x(t_f)] + \int_t^{t_f} f_0(x, u)\, d\tau$　(4)

直接的には，ここに記述した問題に含まれない問題も多いが，変数の導入など簡単な操作によって，きわめて広汎な問題が正確に，またはよい近似でこの種の問題に帰着できる。

制御系のシンセシス　最適制御問題では，終端条件は記述されているが初期条件が記述されていないことに注意すべきである。それは，最適制御問題が特定の初期条件に対する最適制御を見出すという問題ではなく，任意の時刻の任意の状態ベクトルに対して，最適な制御 u が発生され，それが制御対象に加えられるようにするという問題だからである。そのため，制御の開始時刻を固定せず，自然の時間とともに流れる現在時刻 t が開始時刻にとられる。そして，要求されて

いることは，任意の現在時刻 t における最適制御 $u_{opt}(t)$ を，同じ時刻の状態ベクトル $x(t)$ の関数として求めることである。

本問のように t_f が指定されていると，その関数形は t に依存し

$$u_{opt} = \phi(x, t) \tag{5}$$

という形になる。これを最適制御法則 optimal control law という。最適制御法則を見出すことを最適制御系のシンセシスという。ϕ の形を直接与えてくれるようなよい理論はない。最適制御を用いたときの J の値すなわち $\min J$ は x と t に依存し，$V(x,t)$ と書くことができる。すなわち

$$V(x,t) = \min J \tag{6}$$

$V(x,t)$ が x について微分可能であると假定すると，最適性の原理から $V(x,t)$ に関する Hamilton - Jacobi の偏微分方程式が得られる。[1] $V(x,t)$ が求まれば ϕ は容易に求まる。しかし，未知の $V(x,t)$ について，x に関する微分可能性を假定するのはおかしいし，またこの種の偏微分方程式を解くことは困難である。

最適制御時間関数　最大原理は，初期条件 $\{x, t\}$ を与えたときの，最適制御時間関数 optimal control sequence $u_{opt}(\tau)$，で

$\in [t, t_f]$ が満足すべき必要条件を与えている。$u_{opt}(\tau)$ を求めるには，2n次元常微分方程式の2点境界値問題を解かなければならないという困難がある。しかし，本来の目的は $u_{opt}(\tau)$ を求めることではなく，optimal control law を求めることである。すなわち，2点境界値問題を解くのではなく，与えられた終端条件を満足するあらゆる可能な最適逆時間解を追跡すべきなのである。この考えに立つと，原理的には2点境界値問題を解かずに optimal control law を見出すことが可能であるということに気がつく。

しかし，この方法で実際に解ける問題は一般的にいって $n \leq 3$ までの問題である。（Kalman の Regulator 問題またはこれに類するものは Riccati の微分方程式を解くときの困難性と実際装置に尨大な記憶再生装置を必要とするということを無視すれば n が幾ら大きくても解ける。）そこで一歩後退し，optimal control law を求めることを諦め，特定の初期条件が与えられたときの $u_{opt}(\tau)$ を求めることで我慢することにしよう。

一たん $u_{opt}(\tau)$ を求めてこれを記憶しておき，時刻 t の進行とともに再生して制御対象に加える方式をプログラム制御という。これは，フィードバックを伴わない開ループ制御であって，原則的にはよい制御といえない。本来，制御するというのは予期できない外乱の影響を抑制するという目的がある

営である。開ループ制御では外乱に対する処置が施されない。これに反し，optimal control law にもとづいて構成された系ではフィードバック作用が行われ，どんな外乱が入っても，つねに最適に対処しつゝ制御が行われる。

さて，$u_{opt}(\tau)$ を求めることで我慢すると，フィードバック制御は絶対にできないかというと，実はそうではない。与えられた初期条件に対し，たった一度 $u_{opt}(\tau)$ を求めてプログラム制御をするというだけでは完全に開ループ制御であるが，ときどき $u_{opt}(\tau)$ を求めなおしてプログラムを斬新なものにすれば間歇的にではあるがフィードバック制御を行ったことになる。$u_{opt}(\tau)$ を頻繁に求めなおすほどフィードバックは完全に近くなり，もし無限大の周波数で $u_{opt}(\tau)$ を求めなおせば optimal control law にもとづいて構成された系と同じ動作をすることになる。結局，速く $u_{opt}(\tau)$ を求めることができれば，それだけよい制御ができるのである。

§2. 最適制御時間関数を求める数値解法の概観

最大原理のような最適制御の必要条件を適用した上で $u_{opt}(t)$ を求める方法を間接法 indirect method という。上述のように，間接法でも，一般には2点境界値問題に帰着し数値解法に依存しなければならない。これに反しそのような必要条件を用

いないで直接的に $u_{opt}(t)$ を求める数値解法を直接法 direct method という。(ここでは初期条件がらえられた問題を論ずるので，初期時刻を t_0 または 0 とおき，時刻を表わす変数を t とする。) 具体的な問題には最大原理の適用自体が困難なものもあるので direct method の方が価値が高い。すでに述べたように，$u_{opt}(t)$ を見出すに要する計算時間の短いものほど賞用される。direct method は発展しつゝあり，今後種々の原理のものの登場が予想されるが，現在主として用いられているものは同一の計算式を繰返し使用する逐次近似的な方法であつて，digital computer の使用を前提としている。次表は algorithm の現況を概観したものである。

1. indirect method
   1. $p(t_0)$ を探索する [2][3][4] (Neustadt, Eaton, Paiewonsky)
   2. $u(t)$ を探索する [5] (Newton-Raphson)
   3. t_f 小なる問題を解きつゝ，t_f を大きくしてゆく [6] (三浦)

2. direct method
   1. gradient 法
      1. conjugate gradient 法 [7] (Ladson-Mitter-Waren)
      2. steepest descent 法 [8][9] (Kelley, Kopp-Moyer)
         1. continuous s.d. 傾斜比例あゆみ，その他
         2. stepwise s.d.
   2. 一定歩みで $u(t)$ を改善してゆく方法 (研究中)

§3. 静的問題

序　最適制御問題は汎関数 $J[u(t)]$ の極値を求める問題である。これに対し，ベクトル u の関数 $J(u)$ の極値を求める問題は普通極値問題または静的問題といわれる。当然，静的問題は最適制御問題（動的問題）より単純である。本論では動的問題を静的問題とは別のものと考えず，極限状態にある静的問題とみなして gradient 法による解法を論ずることにする。静的問題における gradient 法は古くから研究されているが，本節では，次節の議論の布石という意味で，静的問題における gradient 法を論じ，新しい考え方の導入を行う。

勾配　p番目の近似値 u_p における関数 $J(u)$ の勾配 g は

$$g = \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)_{u=u_p} \tag{7}$$

で定義される。これを単に定義として受け取るだけでなく，勾配という語に対して，我々が普通持っている概念と一致したものであるということを明かにしておこう。

方向余弦ベクトル（大きさは1である）α を用いると，任意のベクトル u は

$$u = u_p + \rho\alpha \tag{8}$$

で表わされる。こゝに $\rho \geq 0$ 。ρ を小さな値にとると

$$J(u) = J(u_p) + g'\rho\alpha + o(\rho) \tag{9}$$

となる。α方向の傾斜はスカラ量 $\left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha$ のことであって

$$\left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha = g'\alpha$$

$$= \text{ベクトル } g \text{ のベクトル } \alpha \text{ への投影} \qquad (10)$$

となる。g が 0 ベクトルのときには $\left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha$ は 0 であるが、そうでないとき $\left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha$ は α に依存する。明らかに、αを

$$\alpha = \frac{g}{|g|} \qquad (11)$$

にとると $\left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha$ は最大となり

$$\max_\alpha \left(\frac{dJ}{dp}\right)_\alpha = |g| \qquad (12)$$

をうる。方向が (11) 式に示すものであって、大きさが $|g|$ に等しいベクトルは明らかに g である。これが勾配として定義されたベクトル g の内容である。

勾配については (7) の他に重要な関係式がある。u の変分を δu とし、これに伴う J の一次増分を δJ とおくと

$$\delta J = g'\delta u \qquad (13)$$

となる。すなわち、J の一次増分は、δu とあるベクトルの内積の形で表わされ、相手のベクトルが勾配になっている。次節では、動的問題における勾配を (7) および (13) の極限形として別個に求め、両者の一致を示す。

<u>steepest descent 法</u>　以下暫らくは u に制限がないものとする。dJ/dp が負の最大値をとるような α は $-g/|g|$ であっ

て $dJ/d\rho$ は $-|g|$ となる。steepest descent 法とは，u_{p+1} を

$$u_{p+1} = u_p - \beta g \quad , \quad \beta \geq 0 \tag{14}$$

にとる方法の総称である。$\beta|g| = |u_{p+1} - u_p|$ を歩みという。

<u>continuous s.d. 法</u>　β を，したがって歩みを，微小にとるのが continuous s.d. 法である。-----, u_{p-1}, u_p, u_{p+1}, ----- は u 空間に点列を作る。$\beta \to 0$ の極限では点列は連続曲線を形成する。曲線上の各点で u はきまっているので，曲線に沿って距離 ξ をはかると，u は ξ の関数ということになる。(14) 式より

$$\frac{du}{d\xi} = -\frac{g}{|g|} \tag{15}$$

また，(12) より

$$\frac{dJ}{d\xi} = -|g| \tag{16}$$

をうる。continous s.d. 法の計算を続行するということは $d\xi = \beta|g|$ に従って $d\xi$ をとることである。g が 0 ベクトルでなければ $d\xi > 0$，すなわち u_p 点は ξ が増加する方向に動いてゆく。g が 0 ベクトルになると $d\xi = 0$，すなわち点は停止する。$g = 0$ は極値の条件であるが，(16) より，J は常に減少しつゝある。したがって，この場合，それは極小値の条件である。すなわち continuous s.d. 法によると，極小値の条件が満足されるまで計算は続行され，また極小値の条件が満足されると u の値は動かなくなる。

以上は β が微小でありさえすればいえることであるが，β の定め方によつて，u がこの曲線の上を動く速度がきまる。$J(u)$ が u_{opt} の付近で2次曲面で近似できるとすると，$|g|$ は概算で $|u_{opt}-u_p|$ に比例する。歩みを $|u_{opt}-u_p|$ に比例してとるというのは合理的である。したがつて歩みを $|g|$ に比例してとるのは合理的であるということになる。このとき

$$\beta|g| = k|g| \tag{17}$$

となる。これより β は一定値 k ということになる。したがつて (14) より

$$u_{p+1} = u_p - kg \tag{18}$$

となる。k は小さな正の定数である。1回の歩みに要する時間を一定値 Δt とすると，u が曲線上を運動する速さは $kg/\Delta t$ となる。$k/\Delta t$ を k_v とおくと

$$\frac{d\xi}{dt} = k_v|g| \tag{19}$$

となる。u が u_{opt} に近づくにつれて $|g|$ が小となり接近速度が小となる。u が u_{opt} に到達するのに理論上は ∞ の時間を要することになる。

<u>u の制限にもとづく修正</u>　簡単のために，u が

$$l_j \leq u^j \leq h_j \quad , \ j = 1, 2, \cdots, N \tag{20}$$

のように，成分ごとに独立の制限をうけるものとする。u の

許容値の集合 Ω は E^N の超直方体である。u_p が $\partial\Omega$ にあるか，$\partial\Omega$ から k のオーダ以内で Ω の内部にあるときには，(18) で計算された u_{p+1} は Ω の外部に出る恐れがある。$u_p - kg$ の第 j 成分が l_j 以下となったならばこれを l_j に，あるいはまた h_j 以上になったならばこれを h_j に修正するといった修正を施したものを $(u_p - kg)_{mod}$ と呼び，u_{p+1} をこれにとる。

$$u_{p+1} = (u_p - kg)_{mod} \tag{21}$$

もし，修正をうける成分の数が非常に多いときには，u_{p+1} は u_p と余り変らないことになり，u_{opt} への接近を一層悪くする。歩みを無限小にとった極限では，u_p が $\partial\Omega$ 上にあるときだけ修正を要することとなり，$(u_p - kg)_{mod}$ は $u_p - kg_{mod}$ と書ける。こゝに g_{mod} とは，$u_p - kg$ が Ω の外に出ないように，g の関係成分を 0 におきかえたベクトルであり，g の $\partial\Omega$ への projection になっている。u_{opt} で g_{mod} は 0 であるが，一般的にいって g は 0 ではない。

<u>stepwise s.d. 法</u>　continuous s.d. 法の収束の遅さを改めるのに stepwise s.d. 法がある。u に制限がないときには u_p から $-g$ 方向に引いた半無限直線上で J の値が最小となる点を u_{p+1} にとる。すなわち

$$J(u_p - \beta_0 g) = \min_{\beta \geq 0} J(u_p - \beta g), \quad u_{p+1} = u_p - \beta_0 g \tag{22}$$

である。β_0を求めること自体がまた一つの極値問題であるがスカラ関数の極値を求めることであるから問題は簡単である。また、ある種の問題では β_0 を解析的に求めることができる。

つぎに u に制限がある場合を考える。説明の便宜上 u_p は Ω の内部にあるものとする。u_pから出発した半直線 $u_p - \beta g$, $\beta \geq 0$ は一般に $\partial\Omega$ に到達する。ここでさらに半直線上を進むと、uの第 j 成分が(20)の制限値を超え、uは Ω の外に出てしまう。そこで u の第 j 成分が制限値をとりつづけるように、半直線を折りまげる。換言すれば、g の第 j 成分を 0 にした新しい半直線を作る。こうして u は $\partial\Omega$ 上を進行するが、いつか再び u は Ω の外に出ようとするであろう。このとき、前と同じ要領で、g の関係成分を 0 におきかえる。このようにして、uは Ω のある頂点に到達し、そこにとまることになる。u_pから出発したこの一連の折線を $L(u_p)$と名付ける。Fig.1 は $L(u_p)$ を示す。u_{p+1} は $L(u_p)$ の上で J が最小となる点として選ばれる。すなわち

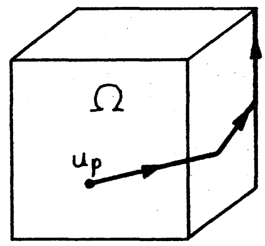

Fig.1 $L(u_p)$

$$J(u_{p+1}) = \min_{u \in L(u_p)} J(u) \tag{23}$$

この algorithm は、その特殊場合として(22)を含んでいる。

§4. 最適制御問題

問題の記述　制御対象の運動が

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{24}$$

で表わされるものとする。こゝに，x は n 次元状態ベクトル，u はスカラの制御とし，u には

$$l \leq u(t) \leq h \quad \forall t \in [0, t_f] \tag{25}$$

なる制限があるものとする。初期値 $x(0)$ は与えられ，終端条件は，t_f 指定，$x(t_f)$ 自由であつて，評価関数が

$$J = F[x(t_f)] + \int_0^{t_f} f_0(x, u)\,dt \tag{26}$$

であるとする。なお，u がベクトルであつても 以下の議論は殆ど同じである。

最適制御問題における勾配　静的問題では，勾配はわかりやすい概念をもつており，またその算定は容易である。最適制御問題で勾配とは何か，またその勾配をどうやつて算出するかゞ最適制御問題を解く鍵である。

第1の考えにもとづく勾配　(7) 式の考えから勾配を求める。制御期間 $0 \sim t_f$ を十分大きな数 N で等分割し，各区間に，1, 2, ……, N なる番号を付する。区間 j の中では，その値が一定値 u^j をもつような時間関数 $u(t)$ は階段関数である。与

えられた問題では $u(t)$ は断片連続関数であるが，こゝでは問題を少し狭めて，$u(t)$ を階段関数に限定しよう。区間 j では 1 で，他の区間では 0 であるような階段関数を $s_j(t)$ で表わすことにすると，任意の許容制御は

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} u^j s_j(t), \quad l \le u^j \le h \tag{27}$$

で表わされる。$1/N \equiv \varepsilon$ とおく。なお区間 j は $(j-1)\varepsilon t_f$ に始まり $j\varepsilon t_f$ に終る。

$u(t)$ が N 次元ベクトル $u = \{u^1, u^2, \cdots, u^N\}$ の関数として表わされているから，汎関数 $J[u(t)]$ は関数 $J(u)$ となり，この最適制御問題は静的問題に帰着する。そして $N\to\infty$ とすることによって，許容制御 $u(t)$ を断片連続関数にまで拡げることができ，したがって本来の問題を解くことができる。

$\sum_{j=1}^{N} (u^j)^2$ は $N\to\infty$ で発散するので，N 次元ベクトルとして u を考えるのは適当でなく，その代りとして

$$v \equiv \{v^1, v^2, \cdots, v^N\} \equiv \{\varepsilon t_f u^1, \varepsilon t_f u^2, \cdots, \varepsilon t_f u^N\} \tag{28}$$

を用いる。そして J をベクトル v の関数と考える。(26) より

$$\frac{\partial J}{\partial v^j} = \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)' \frac{\partial x(t_f)}{\partial v^j} + \frac{\partial}{\partial v^j}\int_0^{t_f} f_0(x, u)\, dt \tag{29}$$

をうる。ベクトル v に特定のベクトル値 v を与えれば $u(t)$ が一義的にきまる。この $u(t)$ に対する (24) の解を $x(t)$

とし，同じ初期条件に対し，ベクトル v を $v+\delta v$ にとったときの解を $x(t)+\delta x(t)$ とする。こゝに δv は v の ε 倍のオーダをもつ変分ベクトルとする。そうすると $\delta x(t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt}\delta x(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{u(t)\\x(t)}} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\substack{u(t)\\x(t)}} \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta v^j}{\varepsilon t_f} s_j(t) + o(\varepsilon) \tag{30}$$

を満足することになり，その初期条件は $\delta x(0)=0$ である。

いま $\frac{d}{dt}\delta x(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{u(t),\,x(t)} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u(t),\,x(t)} m(t)$ で表わされる時変線形系を考える。$m(t)$ はスカラの制御である。そのインパルス応答関数を $w(t,\tau)$ とする。$w(t,\tau)$ は n 次元ベクトルで，τ はインパルが印加された時刻，t は応答を算定する時刻である。これを用いると，(30) の解はつぎのように表わされる。

$$\delta x(t) = \sum_{j=1}^{k} w(k\varepsilon t_f,\, j\varepsilon t_f)\,\delta v^j + o(\varepsilon) \tag{31}$$

こゝに，k は $t/\varepsilon t_f$ の直近下位の整数である。これより

$$\frac{\partial x(t)}{\partial v^j} = w(k\varepsilon t_f,\, j\varepsilon t_f) + o(\varepsilon) \tag{32}$$

が得られる。これを用いると，(29) の第1項は容易に算出できる。つぎに，その第2項を考える。

$$\frac{\partial}{\partial v^j}\int_0^{t_f} f_0(x,u)\,dt$$
$$= \frac{\partial}{\partial v^j}\Big\{ f_0[x(\varepsilon t_f), u^1]\,\varepsilon t_f + f_0[x(2\varepsilon t_f), u^2]\,\varepsilon t_f + \cdots\cdots$$
$$+ f_0[x(t_f), u^N]\,\varepsilon t_f \Big\} + o(\varepsilon)$$

$$= \frac{\partial}{\partial v^j}\left\{ f_0[x(j\varepsilon t_f), u^j]\,\varepsilon t_f + f_0[x(\overline{j+1}\,\varepsilon t_f), u^{j+1}]\,\varepsilon t_f + \cdots\cdots + f_0[x(t_f), u^N]\,\varepsilon t_f \right\} + o(\varepsilon)$$

$$= \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(j\varepsilon t_f)\\ u=u^j}} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(j\varepsilon t_f)\\ u=u^j}} \frac{\partial x(j\varepsilon t_f)}{\partial v^j}\,\varepsilon t_f + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(\overline{j+1}\,\varepsilon t_f)\\ u=u^{j+1}}} \frac{\partial x(\overline{j+1}\,\varepsilon t_f)}{\partial v^j} + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(t_f)\\ u=u^N}} \frac{\partial x(t_f)}{\partial v^j}\,\varepsilon t_f + o(\varepsilon)$$

$$= \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(j\varepsilon t_f)\\ u=u^j}} + \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(j\varepsilon t_f)\\ u=u^j}} w(j\varepsilon t_f, j\varepsilon t_f) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)_{\substack{x=x(\overline{j+1}\,\varepsilon t_f)\\ u=u^{j+1}}} w(\overline{j+1}\,\varepsilon t_f, j\varepsilon t_f) + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(t_f)\\ u=u^N}} w(t_f, j\varepsilon t_f) \right\} \varepsilon t_f + o(\varepsilon)$$

$$= \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(j\varepsilon t_f)\\ u=u^j}} + \sum_{l=j}^{N} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(l\varepsilon t_f)\\ u=u^l}} w(l\varepsilon t_f, j\varepsilon t_f)\,\varepsilon t_f + o(\varepsilon) \tag{33}$$

かくして

$$\frac{\partial J}{\partial v} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(\varepsilon t_f)\\ u=u^1}} \\ \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(2\varepsilon t_f)\\ u=u^2}} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(N\varepsilon t_f)\\ u=u^N}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)' w(t_f, \varepsilon t_f) + \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(l\varepsilon t_f)\\ u=u^l}} w(l\varepsilon t_f, \varepsilon t_f)\,\varepsilon t_f \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)' w(t_f, 2\varepsilon t_f) + \sum_{l=2}^{N} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(l\varepsilon t_f)\\ u=u^l}} w(l\varepsilon t_f, 2\varepsilon t_f)\,\varepsilon t_f \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)' w(t_f, N\varepsilon t_f) + \sum_{l=N}^{N} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(l\varepsilon t_f)\\ u=u^l}} w(l\varepsilon t_f, N\varepsilon t_f)\,\varepsilon t_f \end{bmatrix} + o(\varepsilon) \tag{34}$$

が得られる。

$\frac{\partial J}{\partial v}$ は N 次元ベクトルであるが，これに階段関数 $\frac{\partial J}{\partial v}(t)$ が対応する。ここに

$$\frac{\partial J}{\partial v}(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial v^j}\, s_j(t) \tag{35}$$

である。$N \to \infty$ の極限をとると $\frac{\partial J}{\partial U}(t)$ は断片連続関数に移行する。その極限の関数はつぎのようになる。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial J}{\partial U}(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{\substack{x=x(t)\\u=u(t)}} + \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)' w(t_f,t) + \int_t^{t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{\substack{x=x(\tau)\\u=u(\tau)}} w(\tau,t)\, d\tau \quad (36)$$

これが，最適制御問題における汎関数 $J[u(t)]$ の勾配であって，時間関数であり，$g(t)$ あるいは $\frac{\partial J}{\partial u}(t)$ とも書く。

<u>第2の考えにもとづく勾配</u>　(13)式の考えから勾配を求める。区間 j における u の値 u^j を δu^j だけ変化させたときの J の一次増分は $\delta u^j\, \varepsilon t_f$ に比例する。その比例定数を g_j とする。各区間で変分を与えると

$$\delta J = \sum_{j=1}^{N} g_j\, \delta u^j\, \varepsilon t_f \quad (37)$$

となる。$N \to \infty$ にした極限をとると

$$\delta J = \int_0^{t_f} g(t)\, \delta u(t)\, dt \quad (38)$$

となる。$g(t)$ が最適制御問題における勾配になる筈である。

以下，δJ を(38)式の形で求めることによって $g(t)$ を求め，それが(36)と一致することを示す。

変分 $\delta u(t)$ に対する(24)の解の一次増分を $\delta x(t)$ とすると，$\delta x(t)$ は，微分方程式

$$\frac{d\, \delta x(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{u(t)\\x(t)}} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\substack{u(t)\\x(t)}} \delta u(t) \quad (39)$$

の，初期条件 $\delta x(0)=0$ の解である。また

$$J+\delta J = F[x(t_f)+\delta x(t_f)] + \int_0^{t_f} f_0[x(t)+\delta x(t),\ u(t)+\delta u(t)]\,dt \tag{40}$$

より

$$\delta J = \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)'_{u=u(t)} \delta x(t_f) + \int_0^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(t)} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{u=u(t)} \delta u(t) \right\} dt \tag{41}$$

をうる。しかるに $\delta x(t)$ はインパルス応答関数を使って
$\delta x(t) = \int_0^t w(t,\tau)\,\delta u(\tau)\,d\tau$ と表わされるから

$$\delta J = \int_0^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{u=u(t)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)'_{u=u(t)} w(t_f,t) \right\} \delta u(t)\,dt$$
$$+ \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(t)} \int_0^t w(t,\tau)\,\delta u(\tau)\,d\tau\,dt \tag{42}$$

となる。この第1項は (38) の形をしているので，第2項について調べる。

$$\text{第2項} = \int_{t=0}^{t=t_f} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(t)} w(t,\tau)\,\delta u(\tau)\,d\tau\,dt \tag{43}$$

の積分範囲は，Fig. 2 の OABO であるが

$$w(t,\tau)=0 \quad ,\quad t<\tau \tag{44}$$

なる性質があるので，積分範囲を OCABO に変えることができる。そうすると

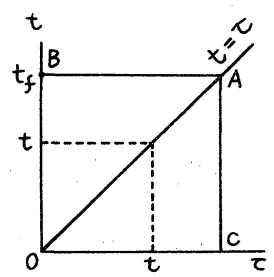

Fig. 2 (43), (46)式の積分範囲

$$\text{第2項} = \int_{t=0}^{t=t_f} \int_{\tau=0}^{\tau=t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(t)} w(t,\tau)\,\delta u(\tau)\,d\tau\,dt \tag{45}$$

となる。ここで記号的に t と τ を入れかえると

$$第2項 = \int_{\tau=0}^{\tau=t_f}\int_{t=0}^{t=t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(\tau)} w(\tau,t)\,\delta u(t)\,dt\,d\tau \qquad (46)$$

となる。この積分範囲は Fig.2 の OCABO であるが，再び(44)の関係を用いると，それを OCAO に変えることができる。よって

$$第2項 = \int_{t=0}^{t=t_f}\int_{\tau=t}^{\tau=t_f} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(\tau)} w(\tau,t)\,\delta u(t)\,dt\,d\tau$$

$$= \int_0^{t_f}\left\{\int_t^{t_f}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(\tau)} w(\tau,t)\,d\tau\right\}\delta u(t)\,dt \qquad (47)$$

となる。かくして (42) は

$$\delta J = \int_0^{t_f}\left\{\left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{u=u(t)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)'_{u=u(t)} w(t_f,t) + \int_t^{t_f}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(\tau)} w(\tau,t)\,d\tau\right\}\delta u(t)\,dt \qquad (48)$$

という，(38) の形として書きかえられた。これより

$$g(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial u}\right)_{u=u(t)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x(t_f)}\right)'_{u=u(t)} w(t_f,t) + \int_t^{t_f}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)'_{u=u(\tau)} w(\tau,t)\,d\tau \qquad (49)$$

をうる。これは，さきに求めた勾配 (36) と一致している。

<u>continuous s.d. 法</u>　u(t) に制限がないときの continuous s.d. 法の algorithm は

$$u_{p+1}(t) = u_p(t) - k\,[g(t)]_{u_p(t)} \qquad (50)$$

である。ここに k は小さな正数である。

u(t) に制限があるときには，まず $u_p(t) - k\,[g(t)]_{u_p(t)}$ を算出し，この時間関数において，その値が l 以下になっている

区間では l に，また h 以上になっている区間では h に修正する。このような修正を施して得られる関数を $\{u_p(t) - k[g(t)]_{u_p(t)}\}_{mod}$ と書く。$u_{p+1}(t)$ をこの修正した関数に選ぶ。kを無限小にとった極限ではこの algorithm は

$$u_{p+1}(t) = u_p(t) - k\left\{[g(t)]_{u_p(t)}\right\}_{mod} \tag{51}$$

となる。こゝに，$\{[g(t)]_{u_p(t)}\}_{mod}$ は修正勾配と呼ばれるものであって，勾配 $[g(t)]_{u_p(t)}$ において，$u_p(t)$ が l に等しく $[g(t)]_{u_p(t)}$ が正の区間と，$u_p(t)$ が h に等しく $[g(t)]_{u_p(t)}$ が負の区間では，$[g(t)]_{u_p(t)}$ を 0 に修正して得られる時間関数のことである。

$u(t)$ に制限がなくても，$u_{opt}(t)$ の付近では収束速度は小である。もし，$u(t)$ に制限があると $\{[g(t)]_{u_p(t)}\}_{mod}$ が，$[0, t_f]$のうちのかなりの時間区間にわたって 0 になることがあり，収束速度は一層悪くなる。

<u>stepwise s.d. 法</u>　continuous s.d. 法の欠点を除くために，静的問題の場合と同じように stepwise s.d. 法を用いる。静的問題では，$L(u_p)$ は u_p から出発し，最後は Ω のある頂点に到達する折線であるが，最適制御問題における $L[u_p(t)]$ は $u_p(t)$ に始まって bang-bang 波形に終る時間関数の集合で

ある。その集合はつぎのようにして作られる。時間関数 $u_p(t) - \beta\,[g(t)]_{u_p(t)}$ が l を超えている区間では l に，また h を超えている区間では h した波形を $u(\beta,t)$ で表わす。β を 0 から ∞ まで変化させたときの $u(\beta,t)$ の集合が $L[u_p(t)]$ である。すなわち

$$L[u_p(t)] = \{\, u(\beta,t) \;:\; \beta \in [0,\infty] \,\} \tag{52}$$

である。Fig. 3 に $u(\beta,t)$ の幾つかの例が示してある。そして stepwise s.d. 法の algorithm は

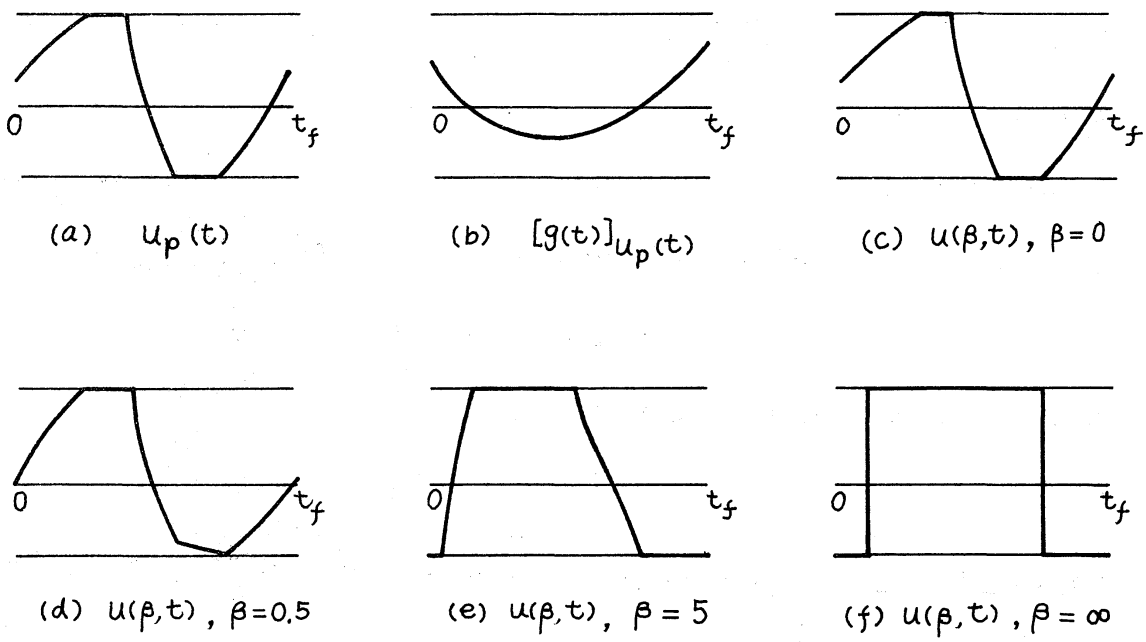

Fig. 3 (a), $u_p(t)$; (b), $[g(t)]_{u_p(t)}$; (c)〜(f), $u(\beta,t)$

$$J[u_{p+1}(t)] = \min_{u(t) \in L[u_p(t)]} J[u(t)] \tag{53}$$

である。

§5. むすび

最適制御問題を静的問題の極限とみなすという立場から，最適制御問題における勾配の算出を行い，また algorithm の導出をした。

(1) C.W. Merriam III ; Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems, Chaps. 5 and 6, Mc-Graw Hill, 1964

(2) L.W. Neustadt ; Synthesizing Time Optimal Control Systems, Jr. MAAA 1, p. 483～93, 1960

(3) J.H. Eaton ; An Iterative Solution to Time-Optimal Control, Ibid 5, p. 329～44, 1962

(4) B. Paiewonsky ; Synthesis of Optimal Controls in "Topics in Optimization" ed. by G. Leitmann, Academic Press, 1967

(5) P. Kenneth and R. McGill ; Two-Point Boundary-Value-Problem Techniques in "Advances in Control Systems 3" ed. by C.T. Leondes, Academic Press, 1966

(6) 三浦ほか；ハイブリッド計算機による最大原理の解法，電気学会雑誌論

文, Vol.86, No.935, p.1370~8, Aug. 1966

(7) L. S. Lasdon et al.; The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems, IEEE Trans. AC-12, No.2, p.132~8, April, 1967

(8) H. J. Kelley; Method of Gradient in "Optimization Techniques" ed. by G. Leitmann, Academic Press, 1962

(9) R. E. Kopp and H. G. Moyer; Trajectory Optimization Techniques "Advances in Control Systems 4" ed. by C. T. Leondes, Academic Press, 1966